Početní část 2 - 21.6.2021

3. Maximalizujeme funkci
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
na množině $M = \{G = 0\}$, kde
$$G(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3 - 6x^2y^2$$
Z odhadu
$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3 > 3(x^2+y^2)^2 \geq 6x^2y^2$$
pro $x^2 + y^2 > 24$ plyne, že M je omezená. Navíc je zřejmě uzavřená, tedy kompaktní. Spojitá funkce f nabývá na M maxima. Hledejme argument tohoto maxima. V počátku je f minimální, takže můžeme předpokládat $[x,y] \neq [0,0]$. Pak, vhledem k vazbě, $xy \neq 0$. Bodem podezřelým z extrému je každý bod $(x,y) \in M$, kde M není regulární, tj.
$$\nabla G(x,y) = 3\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12xy \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0.$$
a dále body, které identifikujeme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Hledejme tedy $[x,y,\lambda] \in M \times \mathbb{R}$ tak, aby
$$\nabla(\lambda G - f) = 0,$$
tj.
$$\left[3\lambda\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - 2\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12\lambda xy \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0.$$
V obou případech, dostaneme, že body podezřelé z extrému jsou pouze takové body, kde
$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
pro jisté $s \in \mathbb{R}$. To je možné jen tehdy, je-li $s^2 = 1$ a zároveň $|x| = |y|$. Dosadíme-li tuto podmínku zpět do vazby $[x,y] \in M$, dostaneme:
$$x^6 = 6x^4 \implies x^2 = 6 \implies x = \pm\sqrt{6}.$$

Vidíme, že $f(x,y) = 12$, pro $|x| = |y| = \sqrt{6}$, takže hledaný poloměr je $R = \sqrt{12}$.
ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:
Převedeme do polárních souřadnic

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta, \\
y &= r\sin\theta,
\end{aligned}
$$

kde $[r,\theta] \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi\rangle$. Pak $M \setminus \{[0,0]\}$ je množina bodů, splňujících

$$r^6 = 48 r^4 \sin^2\theta \cos^2\theta$$

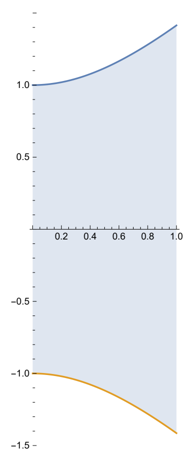
$$
\begin{aligned}
\iff\ & r^2 = 12\sin^2 2\theta \\
\iff\ & r = \sqrt{12}\,|\sin 2\theta|
\end{aligned}
$$

Odtud už snadno nahlédneme, že maximální hodnota r na množině M je $\sqrt{12}$, která se nabývá pro $\theta \in \left\{\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}\right\}$.

4. Jde o rotační těleso, které si představíme třeba tak, si nakreslíme jeho řez rovinou $y = 0$. V této rovině se rovnice redukují na

$$x^2 = z^2 - 1$$
$$x^2 = 1$$

tedy jde o plochu ohraničenou přímkami $x = \pm 1$ a hyperbolami $z = \pm\sqrt{x^2+1}$. Jelikož budeme počítat objem tohoto tělesa, stačí uvažovat, že vznikne rotací (okolo osy y) plochy ohraničené těmito hyperbolami a přímkami $x = 0, x = 1$, viz obrázek:



Naše těleso je tedy ohraničeno stěnou válce a horní a dolní částí dvoudílného hyperboloidu. Pak použijeme vzorec pro objem rotačního tělesa

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx = 2\pi \int_0^1 x(2\sqrt{x^2+1})dx$$

Použijeme substituci $t = x^2, dt = 2xdx$ a tedy

$$V = 2\pi \int_0^1 \sqrt{t+1}dt = 2\pi \left[\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^1 = \boxed{\frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)}.$$